

Monomiale Involutive Basen

Seminar Involutive Basen und Auflösungen SoSe 2021

Matthias Orth

Universität Kassel

15.04.2021

Sei K ein Körper, $\mathcal{P} = K[x_1 \dots, x_n]$ ein Polynomring.

Definition

Es sei $\mu = (\mu_1 \dots, \mu_n) \in \mathbb{N}_0^n$ ein Multiindex. Dann schreibe:

- $x^\mu = \prod_{i=1}^n x_i^{\mu_i}$
- $\deg(x^\mu) = |\mu| = \sum_{i=1}^n \mu_i$

Sei $\mathcal{N} \subset \mathbb{N}_0^n$ endlich, $\nu, \mu \in \mathbb{N}_0^n$, $N \subseteq \{1, \dots, n\}$.

Definition

- $\mathcal{C}(\nu) = \nu + \mathbb{N}_0^n$
- Schreibe $\nu \mid \mu$, falls $\mu \in \mathcal{C}(\nu)$.
- $\langle \mathcal{N} \rangle = \bigcup_{\nu \in \mathcal{N}} \mathcal{C}(\nu)$
- $\mathbb{N}_N^n = \{\nu \in \mathbb{N}_0^n \mid \nu_i = 0 \ \forall i \in \{1, \dots, n\} \setminus N\}$.

- Gröbnerbasen-Theorie: Zurückführung der Analyse polynomialer Ideale auf Analyse monomialer Ideale
- Monomiales Ideal I besitzt minimales Erzeugendendensystem $E \subset \mathbb{T}^n$
- Jeder Term $x^\mu \in I$ durch mindestens ein $x^\nu \in E$ teilbar
- x^ν nicht eindeutig.

- Involutive Division: Eingeschränkte Teilbarkeitsrelation
- Ziel: Jedes $x^\mu \in I$ hat *eindeutigen* involutiven Teiler im Erzeugendensystem
- $\rightsquigarrow$ kombinatorische Zerlegung von I
- Bestimmung der involutiven Teilbarkeit soll *effizient* sein.
- Involutives Erzeugendensystem i.A. größer als minimales EZS
- Identifiziere $\mathbb{N}_0^n$ und $\mathbb{T}^n$ mittels $\mu \leftrightarrow x^\mu$

Graphische Darstellung der Halbgruppe $\mathbb{T}^n$ (1)

- Für kleine Dimensionszahl $n \leq 3$ kann man $\mathbb{T}^n$ graphisch darstellen
- Für $n = 2$: Term $x^k y^\ell$ identifiziert mit Punkt (k, ℓ)
- Monomiale Ideale leicht darstellbar
- Idealoperationen wie $+$, $\cap$, $:$, $\dots$ haben einfache graphische Interpretation

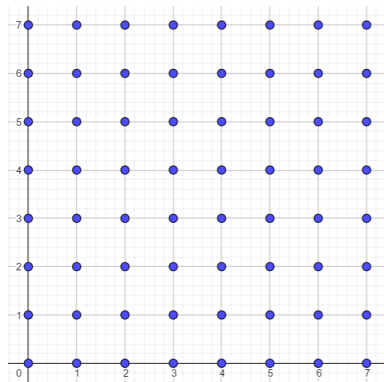


Figure: Schema von $\mathbb{T}^2$ bzw. $\mathbb{N}_0^2$

Graphische Darstellung der Halbgruppe $\mathbb{T}^n$ (2)

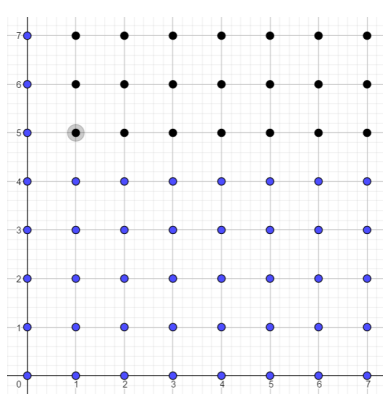


Figure: Das Ideal $\langle xy^5 \rangle$ bzw. $\langle (1, 5) \rangle$

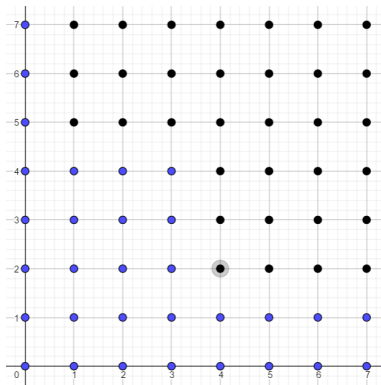


Figure: Das Ideal $\langle xy^5, x^4y^2 \rangle$ bzw. $\langle (1, 5), (4, 2) \rangle$

Graphische Darstellung der Halbgruppe $\mathbb{T}^n$ (3)

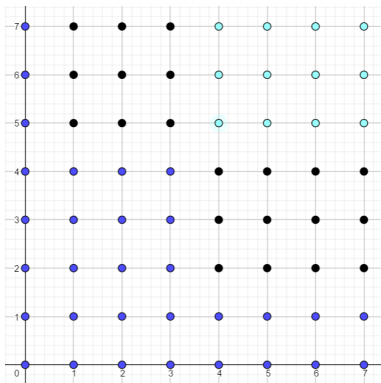


Figure: Der Idealschnitt $\langle xy^5 \rangle \cap \langle x^4y^2 \rangle$
bzw. $\langle (1,5) \rangle \cap \langle (4,2) \rangle$ (hellblau)

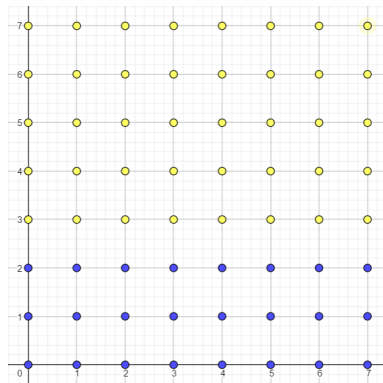


Figure: Der Idealquotient $\langle xy^5 \rangle : \langle x^4y^2 \rangle$
bzw. $\langle (1,5) \rangle : \langle (4,2) \rangle$ (gelb)

Definition

Involutive Division L auf $\mathbb{N}_0^n$ ordnet für jede endliche Teilmenge $\mathcal{N} \subset \mathbb{N}_0^n$ jedem Multiindex $\nu \in \mathcal{N}$ eine Menge $N_{L,\mathcal{N}}(\nu) \subseteq \{1, \dots, n\}$ multiplikativer Indizes zu. Außerdem gelten die Eigenschaften (i),(ii) für die *involutiven Kegel* $\mathcal{C}_{L,\mathcal{N}}(\nu) = \nu + \mathbb{N}_{N_{L,\mathcal{N}}(\nu)}^n$:

- (i) $\mathcal{C}_{L,\mathcal{N}}(\nu) \cap \mathcal{C}_{L,\mathcal{N}}(\mu) \neq \emptyset \implies \mathcal{C}_{L,\mathcal{N}}(\mu) \subseteq \mathcal{C}_{L,\mathcal{N}}(\nu) \vee \mathcal{C}_{L,\mathcal{N}}(\nu) \subseteq \mathcal{C}_{L,\mathcal{N}}(\mu)$.
- (ii) Ist $\mathcal{N}' \subseteq \mathcal{N}$, so gilt $\mathcal{C}_{L,\mathcal{N}'}(\nu) \supseteq \mathcal{C}_{L,\mathcal{N}}(\nu) \forall \nu \in \mathcal{N}'$.

- Bedingung (i): Triviale Durchschnitte.
- Bedingung (ii): *Filteraxiom*.

Definition

Bei multiplikativer Schreibweise ($\mathbb{T}^n$ statt $\mathbb{N}_0^n$) interpretiert man $\{x_i \mid i \in N_{L,\mathcal{N}}(\nu)\}$ als *multiplikative Variablen* des Terms x^ν .

Man schreibt $\mu|_{L,\mathcal{N}}\nu$, falls $\mu \in \mathcal{N}$ und $\nu \in \mathcal{C}_{L,\mathcal{N}}(\mu)$. Man sagt: μ *teilt* ν *involutiv*.

- Involutive Teilbarkeit: Einschränkung der üblichen Teilbarkeitsrelation.
- $\mu|_{L,\mathcal{N}}\nu \Rightarrow \mu|\nu$, Umkehrung i.A. falsch.
- $\mu|_{L,\mathcal{N}}\nu \wedge \nu|_{L,\mathcal{N}}\mu \Rightarrow \mu = \nu$

Folgerung

Für $\mu, \nu \in \mathcal{N}$ mit $\mu \neq \nu$ gilt genau eine der drei Aussagen

- ① $\mathcal{C}_{L,\mathcal{N}}(\mu) \subsetneq \mathcal{C}_{L,\mathcal{N}}(\nu)$,
- ② $\mathcal{C}_{L,\mathcal{N}}(\nu) \subsetneq \mathcal{C}_{L,\mathcal{N}}(\mu)$,
- ③ $\mathcal{C}_{L,\mathcal{N}}(\mu) \cap \mathcal{C}_{L,\mathcal{N}}(\nu) = \emptyset$.

Definition

Involutive Hülle von $\mathcal{N}$ bzgl. L :

$$\langle \mathcal{N} \rangle_L = \bigcup_{\nu \in \mathcal{N}} \mathcal{C}_{L, \mathcal{N}}(\nu).$$

Definition

- ① Wenn $\langle \mathcal{N} \rangle_L = \langle \mathcal{N} \rangle$, dann ist $\mathcal{N}$ eine *schwache L -involutive Basis*.
 - ② Wenn zusätzlich $\langle \mathcal{N} \rangle_L = \bigsqcup_{\nu \in \mathcal{N}} \mathcal{C}_{L, \mathcal{N}}(\nu)$, dann heißt $\mathcal{N}$ *starke L -involutive Basis*.
- $\mathcal{N}$ starke L -involutive Basis $\implies \mathcal{N}$ schwache L -involutive Basis.
Umkehrung i.A. falsch.
 - $\mathcal{N}$ keine schwache L -involutive Basis $\implies \exists \mu \in \langle \mathcal{N} \rangle \setminus \langle \mathcal{N} \rangle_L$.
 - $\mu \in \langle \mathcal{N} \rangle \setminus \langle \mathcal{N} \rangle_L$ heißt *Obstruktion zur Involution*.

Definition

Eine involutive Division L heißt *global*, falls für alle $\nu \in \mathbb{N}_0^n$ und alle endlichen $\mathcal{N}, \mathcal{M} \subset \mathbb{N}_0^n$ mit $\nu \in \mathcal{N} \cap \mathcal{M}$ gilt: $N_{L,\mathcal{N}}(\nu) = N_{L,\mathcal{M}}(\nu)$. Mit anderen Worten: L ist global, wenn die Zuweisung der multiplikativen Indizes unabhängig vom betrachteten Kontext ist.

Für globale involutive Divisionen kann $\mathcal{N}$ im Index weggelassen werden, da die Zuweisung der multiplikativen Indizes von $\mathcal{N}$ nicht abhängt.

Definition

Eine involutive Division L heißt *noethersch*, wenn jedes monomiale Ideal I eine involutive Basis bezüglich L besitzt.

Definition

- Menge $\mathcal{N} \subset \mathbb{N}_0^n$ *involutiv autoreduziert* bezüglich L , falls $\nexists \mu \neq \nu \in \mathcal{N} : \mu|_{L, \mathcal{N}} \nu$.
- *Involutiver Autoreduktionsschritt* für $\mathcal{N}$:

$$\tilde{\mathcal{N}} = \{\mu \in \mathcal{N} \mid \nexists \nu \in \mathcal{N} \setminus \{\mu\} : \nu|_{L, \mathcal{N}} \mu\} \subset \mathcal{N}.$$

- Es gilt $\langle \mathcal{N} \rangle_L \subseteq \langle \tilde{\mathcal{N}} \rangle_L$. (Benutze Filteraxiom!)
- $\tilde{\mathcal{N}}$ nicht notwendigerweise involutiv autoreduziert, weil potentiell $N_{L, \tilde{\mathcal{N}}}(\nu) \supset N_{L, \mathcal{N}}(\nu)$ für manche $\nu \in \tilde{\mathcal{N}}$.
- Alle Mengen endlich $\rightsquigarrow$ nach endlich vielen Schritten erhält man autoreduzierte Menge.
- Wenn L global $\rightsquigarrow$ schon nach einem Schritt autoreduziert.

Ermittlung starker Basen aus schwachen

Starke involutive Basen sind genau die autoreduzierten schwachen involutiven Basen. Daher:

Satz

Ist $\mathcal{N}$ eine schwache involutive Basis von $\langle \mathcal{N} \rangle$ bezüglich der involutiven Division L , dann existiert eine Teilmenge $\mathcal{N}' \subseteq \mathcal{N}$, die eine starke involutive Basis von $\langle \mathcal{N} \rangle$ bezüglich L ist.

Beweis.

Folgt aus Prozess der Autoreduktion, da $\langle \mathcal{N} \rangle_L = \langle \mathcal{N} \rangle$ und bei einem Autoreduktionsschritt immer $\langle \mathcal{N} \rangle_L \subseteq \langle \tilde{\mathcal{N}} \rangle_L$ gilt. Der Prozess der Autoreduktion liefert also eine Folge schwacher involutiver Basen und endet bei einer starken involutiven Basis. □

Minimale involutive Basen

Definition

Sei L eine involutive Division auf $\mathbb{T}^n$ und $I \trianglelefteq \mathcal{P}$ ein monomiales Ideal. Eine starke L -involutive Basis $B \subset \mathbb{T}^n$ von I heißt *minimale L -involutive Basis von I* , wenn für jede L -involutive Basis B' von I gilt, dass $B \subseteq B'$.

Satz

Sei L eine globale involutive Division auf $\mathbb{T}^n$. Dann besitzt jedes monomiale Ideal $I \trianglelefteq \mathcal{P}$, für das eine L -involutive Basis existiert, genau eine minimale L -involutive Basis $B \subset \mathbb{T}^n$.

Beweis.

Involutive Teilbarkeit $|_L$ ist fundierte partielle Ordnung auf $\mathbb{T}^n \cap I$; Menge B der $|_L$ -minimalen Elemente ist endliche L -involutive Basis, da sonst überhaupt keine L -involutive Basis von I existieren würde.

B ist offensichtlich minimal. □

Pommaret-Division (1)

Definition

Zu $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{N}_0^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ sei

$$\text{cls}(\mu) = \min \{i \mid \mu_i > 0\}$$

die *Klasse* von μ .

Definition

Die *Pommaret-Division* P weist jedem $\mu \in \mathbb{N}_0^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ die multiplikativen Indizes $N_P(\mu) = \{1, 2, \dots, \text{cls}(\mu)\}$ zu. Außerdem:
 $N_P((0, \dots, 0)) = \{1, \dots, n\}$.

Die Pommaret-Division P ist per Definition global, schreibe daher kurz $\mathcal{C}_P(\mu)$ für $\mathcal{C}_{P, \mathcal{N}}(\mu)$.

Satz

Die Pommaret-Division ist eine involutive Division.

Beweis.

- P global $\implies$ Filteraxiom erfüllt.
- Sei $\mathcal{N} \subset \mathbb{N}_0^n$ endlich, $\mu \neq \nu \in \mathcal{N}$. Prüfe Bedingung (i) (Triviale Durchschnitte) nach. Fallunterscheidung:
 - 1 $\mu = (0, \dots, 0)$: Dann $\mathcal{C}_P(\mu) = \mathbb{N}_0^n$, also $\mathcal{C}_P(\nu) \subset \mathcal{C}_P(\mu)$.
 - 2 $\nu = (0, \dots, 0)$: analog.
 - 3 Sonst: Sei oBdA $k = \text{cls}(\mu) \leq \text{cls}(\nu) = \ell$. Wenn $k = \ell$ und $\mathcal{C}_P(\mu) \cap \mathcal{C}_P(\nu) \neq \emptyset$, dann $\mu_i = \nu_i$ für $i > \ell$ und oBdA $\mu_\ell > \nu_\ell \implies \mu \in \mathcal{C}_P(\nu)$ und $\mathcal{C}_P(\mu) \subset \mathcal{C}_P(\nu)$. Wenn $k < \ell$ und $\mathcal{C}_P(\mu) \cap \mathcal{C}_P(\nu) \neq \emptyset$, dann $\mu_i = \nu_i$ für $i > \ell$ und $\mu_\ell \geq \nu_\ell \implies \mu \in \mathcal{C}_P(\nu)$ und $\mathcal{C}_P(\mu) = \mu + \mathbb{N}_{N_P(\mu)}^n = \mu + \mathbb{N}_{\{1, \dots, k\}}^n \subset \nu + \mathbb{N}_{\{1, \dots, \ell\}}^n = \mathcal{C}_P(\nu)$.



Beispiel

(i) $n = 2$, $\mathcal{N} = \{(2, 0), (0, 2)\}$, $L = P$. Es gilt $\text{cls}(2, 0) = 1$, $\text{cls}(0, 2) = 2$. Es ergibt sich folgendes Bild: Obstruktionen zur Involution sind alle Multiindizes der Form $(k, 1)$, $k \geq 2$. Eine involutive Vervollständigung und starke Pommaret-Basis von $\langle \mathcal{N} \rangle$ ist $B = \mathcal{N} \cup \{(2, 1)\}$. B ist sogar die eindeutige minimale Pommaret-Basis des Ideals.

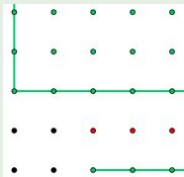


Figure: Bsp. (i)

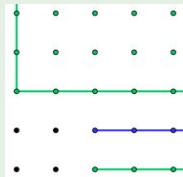


Figure: Bsp. (i) nach Vervollständigung

Beispiel

(ii) $n = 2$, $\mathcal{N} = \{(1, 0)\}$, $L = P$. Es gilt $\text{cls } \mu = 1 \ \forall \mu \in \langle \mathcal{N} \rangle$. Das Ideal $\langle \mathcal{N} \rangle$ besitzt Elemente mit beliebig großen zweiten Koordinaten. Also hat es keine Pommaret-Basis. Dies zeigt auch: Die Pommaret-Division P ist nicht noethersch.

Nach Umsortierung der Koordinaten ist $\mathcal{N}$ jedoch sogar eine starke Pommaretbasis von $\langle \mathcal{N} \rangle$:

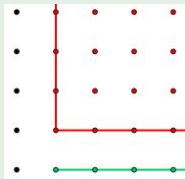


Figure: Bsp. (ii)

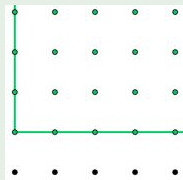


Figure: Bsp. (ii) nach
Koordinatenumsortierung

Definiere die Janet-Division J :

Definition

- Sei $\mathcal{N} \subset \mathbb{N}_0^n$ endlich, $\mu \in \mathcal{N}$, $m \in \{1, \dots, n\}$. m -te Janet-Klasse von μ bzgl. $\mathcal{N}$:

$$(\mu_m, \dots, \mu_n)_{\mathcal{N}} = \{\nu \in \mathcal{N} \mid \forall k \geq m : \nu_k = \mu_k\}.$$

- $n \in N_{J, \mathcal{N}}(\mu)$, wenn μ_n maximal in $\{\nu_n \mid \nu \in \mathcal{N}\}$
 - Für $m < n$: $m \in N_{J, \mathcal{N}}(\mu)$, wenn μ_m maximal in $\{\nu_m \mid \nu \in (\mu_{m+1}, \dots, \mu_n)_{\mathcal{N}}\}$.
-
- Interpretation in $\mathbb{T}^n$: Janet-Division induziert von lexikographischer Ordnung mit $x_1 \prec x_2 \prec \dots \prec x_n$
 - x_j nichtmultiplikativ für $x^\mu \iff \exists x^\nu \in \mathcal{N} : x^\mu \prec x^\nu$ wegen x_j -Grad.

Satz

Die Janet-Division ist eine involutive Division.

Beweis.

- Filteraxiom offensichtlich erfüllt, da für $\mathcal{N}' \subset \mathcal{N}$ auch $(i_{m+1}, \dots, i_n)_{\mathcal{N}'} \subset (i_{m+1}, \dots, i_n)_{\mathcal{N}}$.
- Sei $\mathcal{N} \subset \mathbb{N}_0^n$ endlich, $\mu \neq \nu \in \mathcal{N}$. Prüfe Bedingung (i) nach. Reicht, zu zeigen: $\mathcal{C}_{J,\mathcal{N}}(\mu) \cap \mathcal{C}_{J,\mathcal{N}}(\nu) = \emptyset$. Wenn $\mu_n \neq \nu_n$, und oBdA $\mu_n < \nu_n$, dann $n \notin N_{J,\mathcal{N}}(\mu)$ und die Beh. folgt. Andernfalls sei $m \in \{1, \dots, n\}$ minimal so, dass

$$(\mu_m, \dots, \mu_n)_{\mathcal{N}} = (\nu_m, \dots, \nu_n)_{\mathcal{N}}.$$

Dann oBdA $\mu_{m-1} < \nu_{m-1}$ und somit $m-1 \notin N_{J,\mathcal{N}}(\mu)$, $\rightsquigarrow$ Beh.



Folgerung

Jede endliche Menge $\mathcal{N} \subset \mathbb{N}_0^n$ ist bezüglich der Janet-Division autoreduziert. Insbesondere gilt, dass jede schwache Janet-Basis des Ideals $\langle \mathcal{N} \rangle$ sogar schon eine starke Janet-Basis dieses Ideals ist.

Beweis.

Folgt sofort aus dem Beweis des letzten Satzes. □

Satz

Die Janet-Division J ist nicht global, aber noethersch.

Beweis.

- Wenn zum Beispiel $\mathcal{N} = \{(0, 5)\} \subset \mathbb{N}_0^2$, dann $N_{J,\mathcal{N}}((0, 5)) = \{1, 2\}$. Aber für $\mathcal{M} = \mathcal{N} \cup \{(0, 7)\}$ gilt $N_{J,\mathcal{M}}((0, 5)) = \{1\}$. Also J keine globale Division.
- Sei $\langle \mathcal{N} \rangle$ ein Ideal; bilde $\hat{\mu} = \text{kgV}(\mu \mid \mu \in \mathcal{N})$. Dann ist $\mathcal{M} := \{\rho \in \mathbb{N}_0^n : \rho \in \langle \mathcal{N} \rangle \wedge \rho \mid \hat{\mu}\}$ Janet-Basis von $\mathcal{N}$. Beachte: $N_{J,\mathcal{M}}(\hat{\mu}) = \{1, \dots, n\}$ und $\hat{\mu}$ teilt alle gemeinsamen Vielfachen der gesamten Menge $\mathcal{N}$ involutiv.



Der Janet-Baum (1)

- *Janet-Baum*: Datenstruktur, die endliche Menge $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{N}_0^n$ repräsentiert.
- Baum von Höhe n ; jeder Knoten steht für genau eine Janet-Klasse von $\mathcal{N}$
- Jedes Blatt (Knoten unterster Ebene) kodiert ein Element von $\mathcal{N}$.
- Janet-multiplikative Indizes können direkt abgelesen werden.
- Einfacher Test für Mitgliedschaft in $\langle \mathcal{N} \rangle_J$.

Der Janet-Baum (2)

Beispiel

Betrachte

$\mathcal{N} = \{(2, 1, 1), (0, 3, 1), (0, 0, 3)\}$. Im Janet-Baum von $\mathcal{N}$ sind multiplikative Indizes durch orangene Knoten angedeutet.

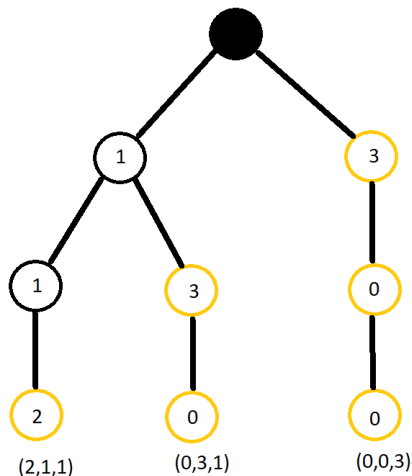


Figure: Der Janet-Baum von $\mathcal{N}$.

Der Janet-Baum (3)

Beispiel

Teste $\mu = (2, 2, 1)$ auf Mitgliedschaft in $\langle \mathcal{N} \rangle_J$. μ definiert eine neue Janet-Klasse und erzeugt einen neuen Knoten auf Ebene 2. $\mu \notin \langle \mathcal{N} \rangle_J$, weil der neue Knoten nicht am weitesten rechts unter den Kindern des Elternknoten liegt.

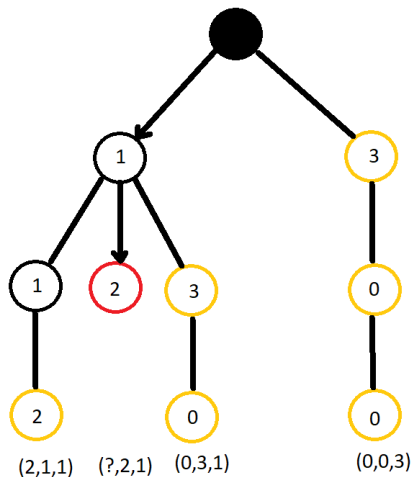


Figure: Test: $\mu = (2, 2, 1) \in \langle \mathcal{N} \rangle_J$?

Der Janet-Baum (4)

Beispiel

Bilde den Janet-Baum von $\mathcal{M} := \mathcal{N} \cup \{(2, 2, 1), (2, 1, 2), (2, 2, 2), (0, 3, 2)\}$.
Siehe Grafik. Man kann zeigen, dass $\mathcal{M}$ eine Janet-Basis von $\langle \mathcal{N} \rangle$ ist.

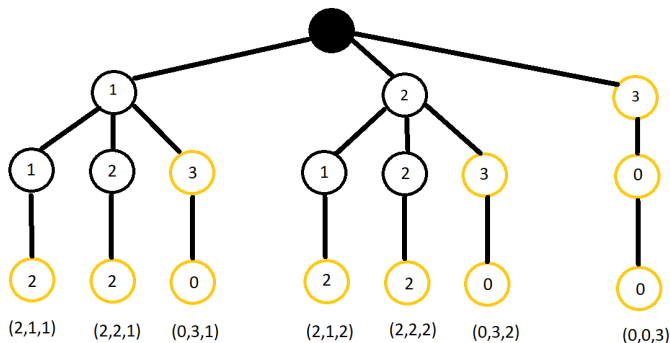


Figure: Janet-Baum der Janet-Basis $\mathcal{M}$.

Beziehung zwischen Pommaret- und Janet-Division (1)

Lemma

$\mathcal{N} \subset \mathbb{N}_0^n$ sei bezüglich der Pommaret-Division autoreduziert. Dann gilt $N_P(\mu) \subseteq N_{J,\mathcal{N}}(\mu) \forall \mu \in \mathcal{N}$.

Beweis.

Sei $\mu \in \mathcal{N}$. Angenommen, $N_P(\mu) \not\subseteq N_{J,\mathcal{N}}(\mu)$; sei $j \leq \text{cls}(\mu)$ minimal so dass $j \notin N_{J,\mathcal{N}}(\mu)$. Dann $\exists \nu \in (\mu_{j+1}, \dots, \mu_n)_{\mathcal{N}}$ mit $\nu_j > \mu_j$. Aber dann gilt $\nu \in \mathcal{C}_P(\mu)$, im Widerspruch zur Pommaret-Autoreduziertheit. $\square$

Beziehung zwischen Pommaret- und Janet-Division (2)

Folgerung

$\mathcal{N} \subset \mathbb{N}_0^n$ starke Pommaret-Basis von $\langle \mathcal{N} \rangle \implies \mathcal{N}$ Janet-Basis von $\langle \mathcal{N} \rangle$.

Beweis.

- $\mathcal{N}$ starke P -Basis $\implies \mathcal{N}$ P -autoreduziert.
- Jetzt mit letztem Satz $\implies N_P(\mu) \subseteq N_{J,\mathcal{N}}(\mu) \forall \mu \in \mathcal{N}$.
- Daraus: $\langle \mathcal{N} \rangle = \langle \mathcal{N} \rangle_P \subseteq \langle \mathcal{N} \rangle_J$, also $\mathcal{N}$ auch Janetbasis.



Folgerung

In obiger Situation gilt $N_P(\mu) = N_{J,\mathcal{N}}(\mu) \forall \mu \in \mathcal{N}$.

Beweis.

Klar.



Beziehung zwischen Pommaret- und Janet-Division (3)

Satz

Sei $\mathcal{N} \subset \mathbb{N}_0^n$ endlich. Berechne $\tilde{\mathcal{N}} \subseteq \mathcal{N}$ durch einen Autoreduktionsschritt bezüglich der Pommaret-Division. Dann gilt: $\langle \mathcal{N} \rangle_J \subseteq \langle \tilde{\mathcal{N}} \rangle_J$.

Beweis.

- $\forall \mu \in \mathcal{N} \exists \nu \in \tilde{\mathcal{N}} : \nu|_P \mu$. Wollen zeigen: $\mathcal{C}_{J,\mathcal{N}}(\mu) \subseteq \mathcal{C}_{J,\tilde{\mathcal{N}}}(\nu)$.
- $(\tilde{\mathcal{N}} \text{ } P\text{-autoreduziert, } \nu|_P \mu) \implies \mu \in \mathcal{C}_{J,\tilde{\mathcal{N}}}(\nu)$.
- Daher: Bleibt zu zeigen, dass $N_{J,\mathcal{N}}(\mu) \subseteq N_{J,\tilde{\mathcal{N}}}(\nu)$. Sei $k = \text{cls}(\nu)$.
- $\nu|_P \mu \implies (\nu_{k+1}, \dots, \nu_n)_{\mathcal{N}} = (\mu_{k+1}, \dots, \mu_n)_{\mathcal{N}}$.
- Daher: $N_{J,\mathcal{N}}(\nu) \cap \{k+1, \dots, n\} = N_{J,\mathcal{N}}(\mu) \cap \{k+1, \dots, n\}$
- Jetzt Filteraxiom $\implies$
 $N_{J,\mathcal{N}}(\mu) \cap \{k+1, \dots, n\} \subseteq N_{J,\tilde{\mathcal{N}}}(\nu) \cap \{k+1, \dots, n\}$, wie gewünscht.



Beziehung zwischen Pommaret- und Janet-Division (4)

Folgerung

Sei $\mathcal{N} \subset \mathbb{N}_0^n$ eine Janet-Basis von $\langle \mathcal{N} \rangle$. Dann ist die Menge $\tilde{\mathcal{N}}$, die man aus $\mathcal{N}$ durch einen Autoreduktionsschritt bezüglich P erhält, auch eine Janet-Basis von $\langle \mathcal{N} \rangle$.

Beweis.

Weil $\mathcal{N}$ eine Janet-Basis ist, gilt $\langle \mathcal{N} \rangle_J = \langle \mathcal{N} \rangle$. Also mit letztem Satz $\langle \mathcal{N} \rangle_J \subseteq \langle \tilde{\mathcal{N}} \rangle_J$. Insgesamt gilt somit $\langle \tilde{\mathcal{N}} \rangle_J = \langle \mathcal{N} \rangle$, wie behauptet. $\square$

Fazit: Wenn man möglichst kleine Janet-Basen konstruieren will, sollte man stets Autoreduktionen bezüglich der Pommaret-Division durchführen.

Beispiel

Aus der Janet-Basis $\{(0, 1), (0, 2)\} \subset \mathbb{N}_0^2$ erhalte durch Pommaret-Autoreduktion die kleinere Janet-Basis $\{(0, 1)\}$.

Verhalten unter Idealoperationen

Die Pommaret-Division ist verträglich mit grundlegenden Idealoperationen.

Fakt

- 1 $\mathcal{N}_1$ Pommaret-Basis von $\langle \mathcal{N}_1 \rangle$, $\mathcal{N}_2$ Pommaret-Basis von $\langle \mathcal{N}_2 \rangle \implies \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2$ (schwache) Pommaret-Basis von $\langle \mathcal{N}_1 \rangle + \langle \mathcal{N}_2 \rangle$.
- 2 Monomiale Ideale I_1, I_2 besitzen Pommaret-Basen $\implies I_1 \cap I_2$ besitzt auch Pommaret-Basis.
- 3 I besitze Pommaret-Basis, x^μ beliebiger Term $\implies$ Idealquotient $I : \langle x^\mu \rangle$ besitzt auch Pommaret-Basis.

Janet-Basen existieren für jedes Ideal, aber Vorsicht:

Beispiel

Seien $\mathcal{N}_1 = \{(0, 2)\}$, $\mathcal{N}_2 = \{(2, 0)\}$ Teilmengen von $\mathbb{N}_0^2$. Dann sind beide $\mathcal{N}_i$ Janet-Basen, aber $\mathcal{M} = \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2 = \{(2, 0), (0, 2)\}$ keine Janet-Basis von $I := \langle \mathcal{N}_1 \rangle + \langle \mathcal{N}_2 \rangle$, da $(2, 1) \in I$, aber $N_{J, \mathcal{M}}(2, 0) = \{1\}$.

Spezialfall: Nulldimensionale monomiale Ideale (1)

$I \subseteq \mathcal{P}$ monomiales Ideal $\rightsquigarrow$ Menge $\mathbb{T}^n \setminus I$ abgeschl. unter Teilerbildung.

Definition

Es sei $\mathcal{T} \subseteq \mathbb{T}^n$ unter Teilerbildung abgeschlossen. Dann heißt die Menge $\partial \mathcal{T} = (\bigcup_{i=1}^n x_i \mathcal{T}) \setminus \mathcal{T}$ Rand von $\mathcal{T}$.

Lemma

$I \subseteq \mathcal{P}$ 0-dimensionales monomiales Ideal $\implies \partial(\mathbb{T}^n \setminus I)$ endliche Menge.

Beweis.

- I 0-dimensional $\implies \dim_K(\mathcal{P}/I) < \infty$.
- Satz von Macaulay $\implies \mathbb{T}^n \setminus I$ K -Basis von $\mathcal{P}/I$.
- Also: $|\mathbb{T}^n \setminus I| < \infty$
- Nach Konstruktion: Auch $|\partial(\mathbb{T}^n \setminus I)| < \infty$.



Spezialfall: Nulldimensionale monomiale Ideale (2)

Lemma

Ist $I \trianglelefteq \mathcal{P}$ ein 0-dimensionales monomiales Ideal, dann besitzt I eine Pommaret-Basis.

Beweis.

- Wenn $I = \mathcal{P}$, dann ist $\{1\}$ eine starke Pommaret-Basis von I .
- Sonst: Sei $x^\mu \in I$. Die Pommaret-Teiler von x^μ entstehen durch wiederholtes Abdividieren von $x_{\text{cls}(\mu)}$.
- $\exists$ Pommaret-Teiler x^ν von x^μ mit $x^\nu / x_{\text{cls}(\nu)} \notin I$.
- $\Rightarrow \{x^\nu \in I \mid x^\nu / x_{\text{cls}(\nu)} \notin I\} \subseteq \partial(\mathbb{T}^n \setminus I)$ starke Pommaret-Basis von I .



Intuition: Um Pommaret-Basis zu finden, suche am Rand von $\mathbb{T}^n \setminus I$.

Spezialfall: Nulldimensionale monomiale Ideale (3)

Beispiel

Sei $\mathcal{N} = \{(0, 0, 8), (0, 5, 4), (0, 10, 0), (3, 2, 5), (6, 3, 2), (10, 0, 0)\} \subseteq \mathbb{N}_0^3$.

Das Ideal $I = \langle x^\mu \mid \mu \in \mathcal{N} \rangle$ ist 0-dimensional, da $\{x^{10}, y^{10}, z^8\} \subset I$. Betrachte das Ideal graphisch durch Zeichnen einer stufigen Oberfläche ("escalier"), die genau die Terme der endlichen Menge $\mathbb{T}^n \setminus I$ verdeckt, aber keine weiteren.

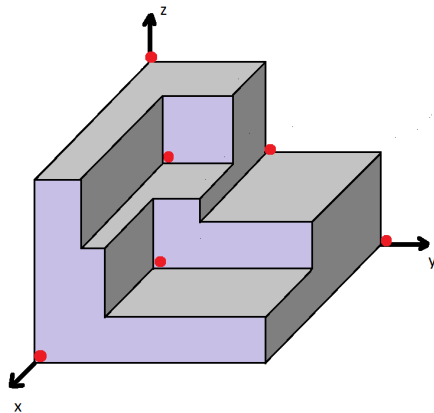


Figure: Escalier des Ideals $\langle x^\mu \mid \mu \in \mathcal{N} \rangle$

Spezialfall: Nulldimensionale monomiale Ideale (4)

Beispiel

Die Menge $\{x^\nu \in I \mid x^\nu / \text{cls}(\nu) \notin I\}$ enthält — anschaulich gesprochen — genau die Terme x^ν , für die $x^\nu / x_{\text{cls}(\nu)}$ hinter der Stufenoberfläche verschwindet.

In der Grafik ist angedeutet, wo diese Terme liegen — für $\text{cls}(\nu) = 2$ durch die senkrechten Linien in der y - z -Ebene; für $\text{cls}(\nu) = 1$ durch die schraffierten Flächen.

Die Pommaretbasis hat 1 Element von Klasse 3, 8 Elemente von Klasse 2 und 60 Elemente von Klasse 1.

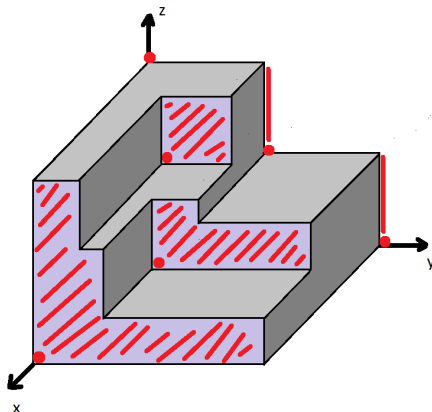


Figure: Konstruktion der starken Pommaretbasis von I

Spezialfall: Nulldimensionale monomiale Ideale (5)

Beispiel

In nebenstehender Grafik sind einige Elemente der Pommaretbasis als gelbe Rauten markiert — diese Elemente stehen in bijektiver Zuordnung zu den Komponenten einer sogenannten *irreduziblen Zerlegung* des Ideals I . (Das ist eine bestimmte Art von Primärzerlegung.)

Die Elemente sind:

$(3, 4, 7), (6, 4, 4), (6, 9, 3),$
 $(10, 1, 7), (10, 2, 4), (10, 9, 1).$

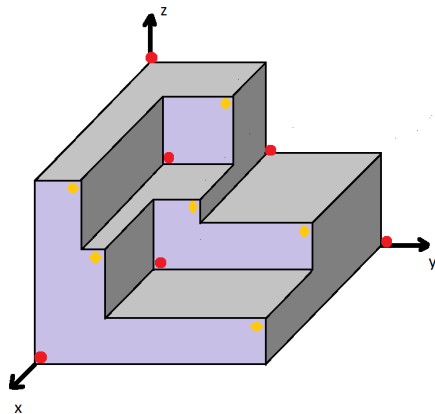


Figure: Elemente der Pommaretbasis, die irreduzible Zerlegung von I induzieren

Fakt

Ein monomiales Ideal $I \trianglelefteq \mathcal{P}$ besitzt genau dann eine Pommaretbasis, wenn die Menge

$$\{x^\nu \in I \mid x^\nu / x_{\text{cls}(\nu)} \notin I\}$$

endlich ist. Dies ist dann sogar die einzige starke Pommaretbasis von I , und gleichzeitig eine starke Janetbasis von I .

Beweis.

Ohne Beweis. (Der Beweis ist eine Zusammenführung von schon in dieser Präsentation bewiesenen Aussagen.) □



SEILER, W. M. : *A combinatorial approach to involution and δ -regularity I: Involutive bases in polynomial algebras of solvable type.* Appl. Alg. Eng. Comm. Comp., 20:207-259, 2009.



SEILER, W. M. : *Involution - The Formal Theory of Differential Equations and its Applications in Computer Algebra.* Springer, 2010.



GERDT, V. P.; BLINKOV, Yu. A. : *Involutive Bases of Polynomial Ideals.* Math. Comput. Simul., 45:519-542, 1998.